

两层星形网络的特征值谱及同步能力*

徐明明 陆君安 周进†

(武汉大学数学与统计学院, 武汉 430072)

(2015年8月7日收到; 2015年10月17日收到修改稿)

多层网络是当今网络科学研究的一个前沿方向. 本文深入研究了两层星形网络的特征值谱及其同步能力的问题. 通过严格导出的两层星形网络特征值的解析表达式, 分析了网络的同步能力与节点数、层间耦合强度和层内耦合强度的关系. 当同步域无界时, 网络的同步能力只与叶子节点之间的层间耦合强度和网络的层内耦合强度有关; 当叶子节点之间的层间耦合强度比较弱时, 同步能力仅依赖于叶子节点之间的层间耦合强度; 而当层内耦合强度比较弱时, 同步能力依赖于层内耦合强度; 当同步域有界时, 节点数、层间耦合强度和层内耦合强度对网络的同步能力都有影响. 当叶子节点之间的层间耦合强度比较弱时, 增大叶子节点之间的层间耦合强度会增强网络的同步能力, 而节点数、中心节点之间的层间耦合强度和层内耦合强度的增大反而会减弱网络的同步能力; 而当层内耦合强度比较弱时, 增大层内耦合强度会增强网络的同步能力, 而节点数、层间耦合强度的增大会减弱网络的同步能力. 进一步, 在层间和层内耦合强度都相同的基础上, 讨论了如何改变耦合强度更有利于同步. 最后, 对两层 BA 无标度网络进行数值仿真, 得到了与两层星形网络非常类似的结论.

关键词: 多层网络, 星形网络, 同步, 特征值谱**PACS:** 89.75.Fb, 89.75.-k, 89.75.Hc, 89.70.-a**DOI:** 10.7498/aps.65.028902

1 引言

近几年, 随着对复杂网络研究的深入, 人们认识到现实中大多数网络并不是独立存在的, 而是与其他网络在结构或功能上相互依存, 形成多层网络^[1-3]. 目前越来越多的与多层网络相关的问题都已引起重视, 比如同步^[4-8]、拓扑结构和动力学^[9]、扩散动力学^[10]、特征值^[11]、疾病传播和信息传播^[12-15]、级联故障^[16,17]、鲁棒性^[18]等. 研究结果表明, 多层网络的性质和传统复杂网络的性质存在很大差异. 尽管多层网络在实际中大量存在, 但现在的研究还处于起步阶段^[2,3].

同步^[19]是网络中的普遍现象, 它在生物振子^[20-23]和大脑认知^[24]等领域中起着重要作用,

对人类的生产生活产生了积极或消极的作用. 目前对单个复杂网络的同步已经有比较成熟的研究^[25-39], 但对多层网络的同步则很少涉及^[4-6].

星形网络是典型的规则网络之一. 文献^[4]探讨了两个完全相同的星形网络通过层间一条边耦合的两层网络的特征值谱, 并考虑了层间耦合方式不同时的同步能力. 受文献^[4]启发, 本文研究了更一般的两层星形网络的同步能力. 对于中心节点与中心节点相连、叶子节点之间相连的两层星形网络, 从理论上严格导出了特征值的解析表达式, 并进一步分析了网络的同步能力与节点数、层间耦合强度和层内耦合强度的关系. 研究发现, 当整个网络的同步域无界时, 网络的同步能力只与叶子节点之间的层间耦合强度和网络的层内耦合强度有关, 与中心节点之间的层间耦合强度和节点数无关. 具体

* 国家自然科学基金 (批准号: 61374173, 11172215) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: jzhou@whu.edu.cn

地, 当层内耦合强度比较弱时, 网络的同步能力仅与层内耦合强度有关; 而当叶子节点之间的层间耦合强度比较弱时, 网络的同步能力仅与叶子节点之间的层间耦合强度有关. 另外, 当整个网络的同步域有界时, 节点数、层间耦合强度和层内耦合强度对网络的同步能力都有影响. 具体来说, 当层内耦合强度比较弱时, 层内耦合强度的增加会增强网络的同步能力, 而节点数、中心节点之间的层间耦合强度的增加会使网络的同步能力变弱; 而当叶子节点之间的层间耦合强度比较弱时, 叶子节点之间的层间耦合强度的增加会增强网络的同步能力, 节点数、层内耦合强度和中心节点之间的层间耦合强度的增加都会使网络的同步能力变弱. 进一步, 给定相同的层间和层内耦合强度及三种不同方式耦合强度变化情况, 结合数值仿真探讨如何选择更有利于同步. 最后, 根据 BA 无标度网络和星形网络均具有中心节点的特性, 对两层 BA 无标度网络进行数值仿真, 得到与两层星形网络非常类似的结论.

2 预备知识

M 层网络中第 K 层第 i 个节点的动力学方程^[10]为

$$\dot{x}_i^K = f(x_i^K) + a_K \sum_{j=1}^N w_{ij}^K \Gamma(x_j^K) + \sum_{L=1}^M d_i^{KL} \Gamma(x_i^L), \quad (1)$$

其中 $1 \leq i \leq N, 1 \leq K \leq M; x_i^K \in \mathcal{R}^n$ 是第 K 层第 i 个节点的状态变量; $f: \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^n$ 是节点的动力学方程; a_K 为第 K 层的层内耦合强度; $\mathbf{W}^K = (w_{ij}^K) \in \mathcal{R}^{N \times N}$ 是第 K 层耦合矩阵, 若节点 i 与节点 $j (i \neq j)$ 相连, 有 $w_{ij}^K = 1$; 否则 $w_{ij}^K = 0$; 且

$$w_{ii}^K = - \sum_{j=1, j \neq i}^N w_{ij}^K.$$

$\mathbf{L}^K = -a_K \mathbf{W}^K$ 是第 K 层的 Laplace 矩阵. d_i^{KL} 是第 K 层和第 L 层的第 i 个节点的层间耦合强度, $\mathbf{D} = (d_i^{KL}) \in \mathcal{R}^{M \times M}$ 是层间的负 Laplace 矩阵, Γ 是网络节点的层内和层间内联函数.

令 \mathcal{L} 表示 M 层网络的 Supra-Laplace 矩阵, \mathcal{L}^I 为层间 Supra-Laplace 矩阵, \mathcal{L}^L 是层内 Supra-Laplace 矩阵^[10], 则有

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}^I + \mathcal{L}^L. \quad (2)$$

令 \mathbf{L}^I 表示网络的层间的 Laplace 矩阵, 则层间的 Supra-Laplace 矩阵 \mathcal{L}^I 可表示为

$$\mathcal{L}^I = \mathbf{L}^I \otimes \mathbf{I}. \quad (3)$$

其中 \otimes 为 Kronecker 乘积, \mathbf{I} 为单位矩阵. 层内 Supra-Laplace 矩阵 \mathcal{L}^L 表示为

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^L &= \begin{pmatrix} \mathbf{L}^1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{L}^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{L}^M \end{pmatrix} \\ &= \bigoplus_{K=1}^M \mathbf{L}^K. \end{aligned} \quad (4)$$

其中 $1 \leq K \leq M, \mathbf{L}^K$ 为第 K 层网络的 Laplace 矩阵.

引理^[40] \mathbf{A}, \mathbf{B} 为两个 $N \times N$ 的矩阵, 则有

$$\begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{A} \end{vmatrix} = |\mathbf{A} + \mathbf{B}| |\mathbf{A} - \mathbf{B}|. \quad (5)$$

3 主要内容

根据主稳定函数方法^[41-43], 模型 (1) 的同步能力由 \mathcal{L} 的非零最小特征值 λ_2 和最大特征值 λ_{\max} 决定. 根据 (2) 式, \mathcal{L} 由 \mathcal{L}^I 和 \mathcal{L}^L 得到. 以下将分别讨论两层星形网络的中心节点和叶子节点之间的层间耦合强度不同和相同时的网络的同步能力的情形.

3.1 中心节点和叶子节点之间的层间耦合强度不同的情形

考虑两个单层网络节点数均为 N 的星形网络, 层间按照中心节点与中心节点、叶子节点之间一一对应连接成两层网络. 两层网络的节点的动力学如 (1) 式中 $M = 2$ 的情形. 层内耦合强度为 $a_1 = a_2 = a$, 中心节点之间的层间耦合强度是 d_0 , 叶子节点之间的层间耦合强度是 d , 如图 1. 当层内耦合强度为 $a_1 = a_2 = 1$, 中心节点之间的层间耦合强度是 d_0 , 叶子节点之间的层间耦合强度是 $d = 0$ 时, 即为参考文献 [4] 中研究的中心节点与中心节点之间一条边连接的情形.

由 (2) 式知, 两层网络的 Supra-Laplace 矩阵为

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} (N-1)a + d_0 & -a & \cdots & -a & -d_0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a & a + d & \cdots & 0 & 0 & -d & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots \\ -a & 0 & \cdots & a + d & 0 & 0 & \cdots & -d \\ -d_0 & 0 & \cdots & 0 & (N-1)a + d_0 & -a & \cdots & -a \\ 0 & -d & \cdots & 0 & -a & a + d & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -d & -a & 0 & \cdots & a + d \end{pmatrix}. \quad (6)$$

经推导得 \mathcal{L} 的特征多项式为 $|\lambda\mathbf{I} - \mathcal{L}| = \lambda(\lambda - a)^{N-2}(\lambda - a - 2d)^{N-2}(\lambda - Na)((\lambda - a - 2d)(\lambda - 2d_0) - (N-1)a(\lambda - 2d))$, 故特征值为 $0, \underbrace{a, \dots, a}_{N-2}, \underbrace{a + 2d, \dots, a + 2d}_{N-2}, Na, (2d_0 + 2d + Na - \sqrt{(Na - 2d + 2d_0)^2 + 8a(d - d_0)})/2, (2d_0 + 2d + Na + \sqrt{(Na - 2d + 2d_0)^2 + 8a(d - d_0)})/2$.

令

$$\lambda_{\text{I}} = (2d_0 + 2d + Na - \sqrt{(Na - 2d + 2d_0)^2 + 8a(d - d_0)})/2,$$

由于实际网络的节点数目是非常大的, 总可以假设 $N \gg a, d, d_0$ 时, 于是做线性展开得

$$\begin{aligned} \lambda_{\text{I}} &= \frac{1}{2}Na \left[1 + \frac{2d_0 + 2d}{Na} - \sqrt{\left(1 + \frac{2d_0 - 2d}{Na}\right)^2 + \frac{8a(d - d_0)}{(Na)^2}} \right] \\ &= \frac{1}{2}Na \left[1 + \frac{2d_0 + 2d}{Na} - \sqrt{1 + \frac{2(2d_0 - 2d)}{Na}} \right] \\ &= \frac{1}{2}Na \left[1 + \frac{2d_0 + 2d}{Na} - \left(1 + \frac{(2d_0 - 2d)}{Na}\right) \right] \\ &= 2d. \end{aligned}$$

同理, 令

$$\lambda_{\text{II}} = (2d_0 + 2d + Na + \sqrt{(Na - 2d + 2d_0)^2 + 8a(d - d_0)})/2,$$

线性展开后有 $\lambda_{\text{II}} = Na + 2d_0$. 故 $\lambda_2 = \min\{a, 2d\}, \lambda_{\text{max}} = Na + 2d_0$.

为了方便分析, 按同步域为无界和有界两种情形, 将 λ_2 和 $r = \lambda_{\text{max}}/\lambda_2$ 归纳为表1.

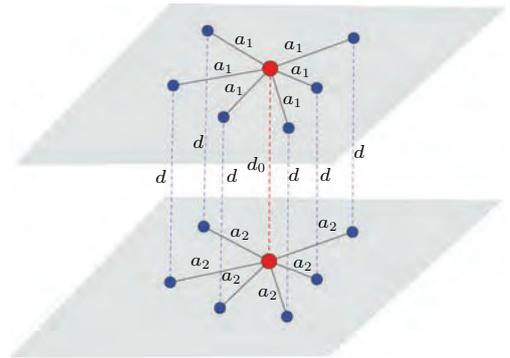


图1 两层星形网络, 层内耦合强度分别为 a_1, a_2 , 中心节点之间的层间耦合强度是 d_0 , 叶子节点之间的层间耦合强度是 d

Fig. 1. A two-layer star networks. The intra-coupling strengths are a_1, a_2 , respectively, the inter-coupling strength between hub nodes is d_0 and that between leaves nodes is d .

表1 $\lambda_2, r = \lambda_{\text{max}}/\lambda_2$ 随 N, a, d_0, d 的变化
Table 1. Change of N, a, d_0, d for $\lambda_2, r = \lambda_{\text{max}}/\lambda_2$.

		随 N 增大	随 a 增大	随 d_0 增大	随 d 增大
$\lambda_2 = \min\{a, 2d\}$	$a < 2d$	不变	增大	不变	不变
	$a > 2d$	不变	不变	不变	增大
$r = \frac{Na + 2d_0}{\min\{a, 2d\}}$	$a < 2d$	增大	减小	增大	不变
	$a > 2d$	增大	增大	增大	减小

从表 1 中可以得出:

1) 对于同步域为无界情形, 当 $a < 2d$ 时, $\lambda_2 = a$; 当 $a > 2d$ 时, $\lambda_2 = 2d$, 这说明网络的同步能力与 a 或 $2d$ 有关; 当 a 比较小时, 网络的同步能力由 a 决定; 当 $2d$ 比较小时, 网络的同步能力由 d 决定; a 或 d 的增大都会增加网络的同步能力. 这说明网络的同步能力在层内耦合强度比较弱时, 只与层内耦合强度有关, 当层间耦合强度比较弱时, 网络的同步能力只与层间耦合强度有关, 也就是说, 层内耦合强度和层间耦合强度两者之间, 弱者决定同步能力;

2) 对于同步域为有界情形, 当 $a < 2d$ 时, $r = (Na + 2d_0)/a$; 当 $a > 2d$ 时, $r = (Na + 2d_0)/(2d)$; 这说明当 a 比较小时, a 增大会增强网络的同步能力, N, d_0 的增大反而会使网络的同步能力变弱; 当 $2d$ 比较小时, 增大 d 会增强网络的同步能力, N, a, d_0 的增大会使网络的同步能力变弱.

数值仿真结果如下.

1) 取 $N = 200, a = 1, d_0 = 2$, 变化 d , 得到 λ_2 和 r (图 2). 对于同步域无界情形, 当 d 很小时, $\lambda_2 = 2d, \lambda_2$ 随着 d 的增大而增大, 从 $d > a/2 = 1/2$

开始有 $\lambda_2 = a = 1$, 所以网络的同步能力先增强后不变. 对于同步域有界的情形, 当 d 很小时, $r = (Na + 2d_0)/(2d)$, r 随着 d 的增大而减小, 当 $d > a/2 = 1/2$ 后, 由于 $N \gg a, d_0, d$, $r = (Na + 2d_0)/a \approx Na/a = N$, 所以网络的同步能力先增强后几乎不变. 说明了无论同步域是无界还是有界, 当 d 从 0 增大到 $a/2$ 时, 网络的同步能力迅速增强, 而在 d 超过 $a/2$ 后, 网络的同步能力基本不变. 也就是说, d 在 $a/2$ 处可使网络的同步能力达到最大, 过大的 d 对于网络的同步能力而言是没有必要的.

2) 取 $N = 200, a = 1, d = 1 (a < 2d)$, 变化 d_0 , 得到 λ_2 和 r (图 3). 取 $N = 200, a = 2, d = 1/2 (a > 2d)$, 变化 d_0 , 得到 λ_2 和 r (图 4). 对于同步域无界情形, 无论 $a < 2d$ 或 $a > 2d$, d_0 的变化基本不改变 λ_2 的值, 也就是说网络的同步能力基本不变. 而对于同步域有界的情形, 当 $a < 2d$ 时, r 值接近于 Na , r 随着 d_0 的增大略有增大, 网络的同步能力略微变弱; 而当 $a > 2d$ 时, r 同样接近于 Na , r 随着 d_0 的增大略有减小, 网络的同步能力略有增强.

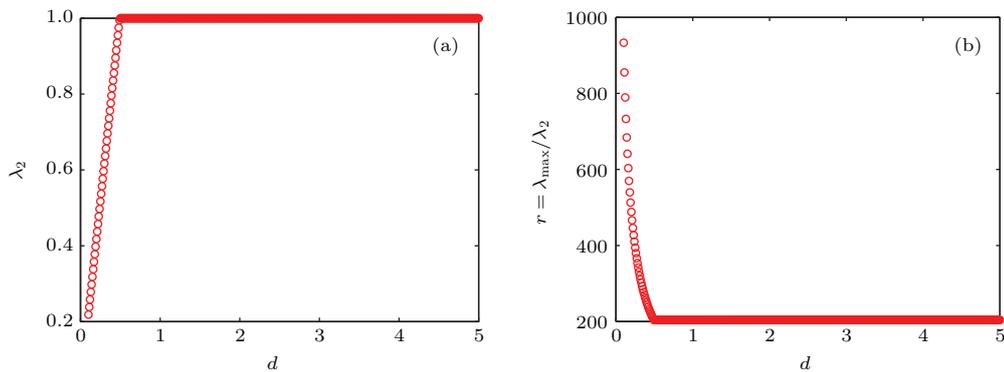


图 2 (a) λ_2 , (b) $r = \lambda_{\max}/\lambda_2$ 随两层星形网络的叶子节点之间的层间耦合强度 d 的变化

Fig. 2. (a) λ_2 , (b) $r = \lambda_{\max}/\lambda_2$ changes with the interlayer coupling strength between the leaf nodes of the two-layer star networks d , respectively.

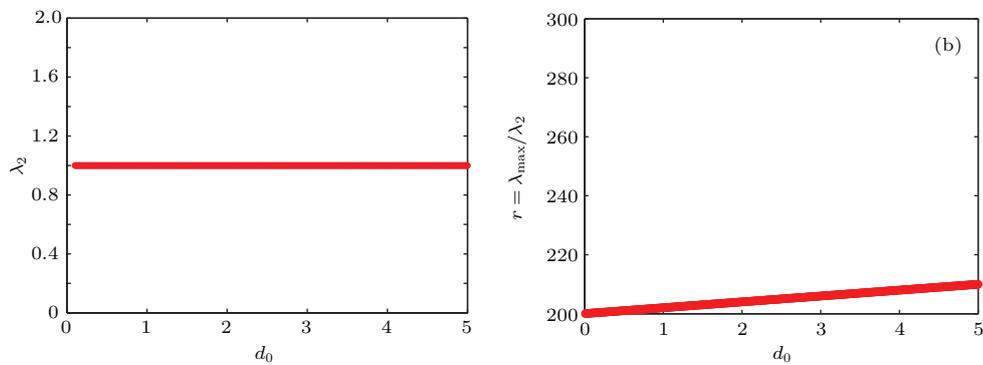


图 3 ($a < 2d$) (a) λ_2 , (b) $r = \lambda_{\max}/\lambda_2$ 随两层星形网络的中心节点之间的层间耦合强度 d_0 的变化

Fig. 3. ($a < 2d$). (a) λ_2 , (b) $r = \lambda_{\max}/\lambda_2$ changes with the interlayer coupling strength between the hub nodes of the two-layer star networks d_0 , respectively.

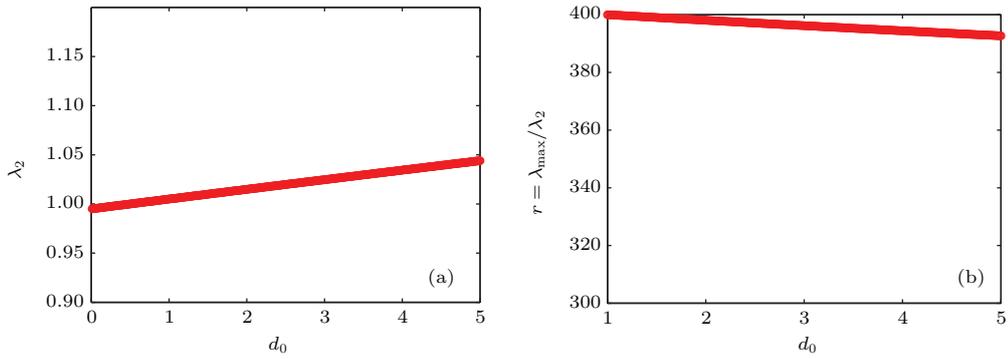


图4 (a) λ_2 , (b) $r = \lambda_{\max}/\lambda_2$ 随两层星形网络的中心节点之间的层间耦合强度 d_0 的变化, $a > 2d$

Fig. 4. (a) λ_2 , (b) $r = \lambda_{\max}/\lambda_2$ changes with the interlayer coupling strength between the hub nodes of the two-layer star networks d_0 , respectively, $a > 2d$.

3) 取 $N = 200, d_0 = 2, d = 1$, 变化 a , 得到 λ_2 和 r (图5). 对于同步域无界情形, 当 a 很小时, $\lambda_2 = a$, λ_2 随着 a 的增大而增大. 当 a 增大到 $a = 2$ 后, $\lambda_2 = 2d = 2$, λ_2 的值不再随 a 变化, 故网络的同步能力先增强后不变. 对于同步域有界情形, a 很小时, $r = (Na + 2d_0)/a$, r 随 a 的增大而减小. 当 a 增大到 $a = 2$ 时, $r = (Na + 2d_0)/2d$, r 随着 a 的增大迅速增大, 故网络的同步能力先增强后迅速减弱. 之所以当 a 增大时会产生这种现象, 是因为层内耦合强度远超过层间耦合强度, 使得两层网络

的结构类似于两个聚类的社团网络 (聚类块内连接紧密, 块间连接稀疏), 同步能力变得很弱.

4) 取 $d_0 = 2, d = 1, a = 1 (a < 2d)$, 变化 N , 得 λ_2 和 r (图6). 固定 $d_0 = 2, d = 1/2, a = 2 (a > 2d)$, 变化 N , 得 λ_2 和 r (图7). 对同步域无界情形, 无论 $a < 2d$ 或 $a > 2d$, N 的变化基本不影响 λ_2 的值, 网络的同步能力基本不受影响. 对同步域有界情形, 对于 $a < 2d$ 和 $a > 2d$, 都有 r 随着 N 的增大而增大, 网络的同步能力变弱.

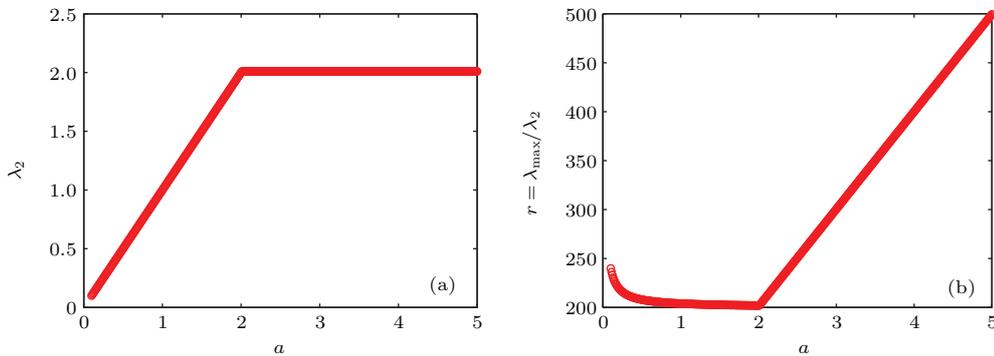


图5 (a) λ_2 , (b) $r = \lambda_{\max}/\lambda_2$ 随两层星形网络的层内耦合强度 a 的变化

Fig. 5. (a) λ_2 , (b) $r = \lambda_{\max}/\lambda_2$ changes with the intralayer coupling strength of the two-layer star networks a , respectively.

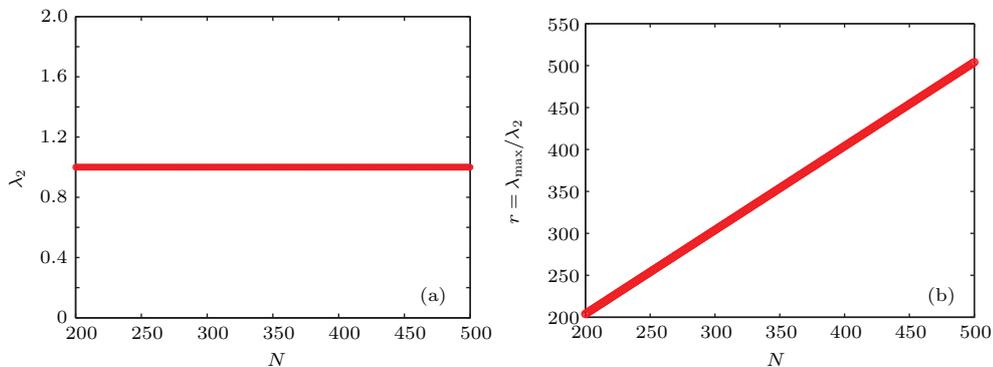


图6 (a) λ_2 , (b) $r = \lambda_{\max}/\lambda_2$ 随星形网络的规模 N 的变化, $a < 2d$

Fig. 6. (a) λ_2 , (b) $r = \lambda_{\max}/\lambda_2$ changes with the size of star networks N , respectively, $a < 2d$.

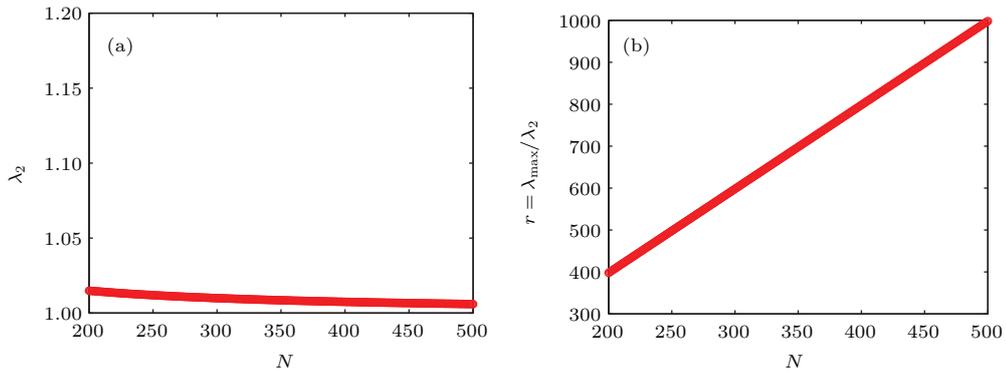


图7 (a) λ_2 , (b) $r = \lambda_{\max}/\lambda_2$ 随星形网络的规模 N 的变化, $a > 2d$

Fig. 7. (a) λ_2 , (b) $r = \lambda_{\max}/\lambda_2$ changes with the size of star networks N , respectively, $a > 2d$.

3.2 中心节点和叶子节点之间的层间耦合强度相同的情形

假设节点之间相连的层间耦合强度均为 $d_i^{KL} = d$. 由 (2) 和 (6) 式知, \mathcal{L} 的特征多项式为

$$|\lambda \mathbf{I} - \mathcal{L}| = \lambda(\lambda - 2d)(\lambda - a)^{N-2}(\lambda - a - 2d)^{N-2} \times (\lambda - Na)(\lambda - Na - 2d),$$

故两层网络的特征值为

$$0, 2d, \underbrace{a, \dots, a}_{N-2}, \underbrace{a + 2d, \dots, a + 2d}_{N-2}, Na, Na + 2d.$$

所以

$$\lambda_2 = \min\{2d, a\}, \quad \lambda_{\max} = Na + 2d.$$

此时, 对于同步域无界的情形, 网络的同步能力取决于 $2d$ 或 a . 当 $2d$ 较大时, 网络的同步能力取决于 a , 而当 a 较大时, 取决于 $2d$, 即两者之中弱者决定网络的同步能力. 对于同步域有界的情形, 网络的同步能力与 N, d, a 有关, 随 N 的增大, 网络的同步能力减弱. 当 d 较大时, 网络的同步能力随 d 的增大而减弱, a 的增大会增强网络的同步能力, 当 a 较大时, 网络的同步能力随 a 的增大而减弱但随 d 的增大而增大. 故同步域有界时, d 和 a 有相反的作用. 所以我们得到, 当 N 增大时, 通过减小 a 或增大 d 可以使得网络的同步能力保持不变. 当 N 固定时, d 增大时可以通过增大 a 使得网络的同步能力保持不变.

对于 $M (M \geq 3)$ 层网络, 若层与层之间的耦合强度均相同且每层的层内耦合强度也相同, 那么经过计算, 其 Supra-Laplace 矩阵 $\bar{\mathcal{L}}$ 的特征多项式为

$$|\lambda \mathbf{I} - \bar{\mathcal{L}}| = \lambda(\lambda - a)^{N-2}(\lambda - Md)^{M-1} \times (\lambda - a - Md)^{(M-1)(N-2)}$$

$$\times (\lambda - Na)(\lambda - Na - Md)^{M-1},$$

故 $M (M \geq 3)$ 层网络的特征值为

$$0, \underbrace{a, \dots, a}_{N-2}, \underbrace{Md, \dots, Md}_{M-1}, \underbrace{a + Md, \dots, a + Md}_{(M-1)(N-2)}, Na, \underbrace{Na + Md, \dots, Na + Md}_{M-1}.$$

所以

$$\lambda_2 = \min\{a, Md\}, \quad \lambda_{\max} = Na + Md.$$

对于 M 层网络的同步域无界的情形, 其同步能力取决于 a 或 Md . 当 $Md > a$ 时, 网络的同步能力取决于 a , 即层内耦合强度的增加会使网络的同步能力增强, 而此时对于网络的同步域有界时,

$$r = \frac{Na + Md}{a} = N + \frac{Md}{a},$$

也就是说, 增加层内耦合强度会增强网络的同步能力, 但网络的节点数、网络的层数和层间的耦合强度的增加反而会减弱网络的同步能力. 当 $Md < a$ 时, 网络的同步能力取决于 Md , 网络的层数和层间耦合强度对网络的同步能力起一致的作用, 增加网络的层数和层间耦合强度会使同步能力增强. 此时对于同步域有界的网络,

$$r = \frac{Na + Md}{Md} = 1 + \frac{Na}{Md},$$

所以网络的节点数和层内耦合强度的增加会减弱网络的同步能力, 网络的层数和层间的耦合强度的增加会使网络的同步能力增强.

3.2.1 改变耦合强度来改变网络的同步能力

当网络的节点数 N 固定时, 层内耦合强度和层间耦合强度会影响网络的同步能力. 那么我们问, 如何改变网络的耦合强度, 更有利于同步. 为此我

们给出以下三种方式, 这三种方式均在耦合强度为 1 的基础上改变.

方式 (I): 固定一层的层内耦合强度 $a_2 = 1$ 和层间耦合强度 $d = 1$, 改变另一层的层内耦合强度 $a_1 = a$.

方式 (II): 固定层间耦合强度 $d = 1$, 改变层内耦合强度 $a_1 = a_2 = a$.

方式 (III): 固定网络的层内耦合强度 $a_1 = a_2 = 1$, 改变层间耦合强度 d .

3.2.2 三种改变方式的理论解析解

方式 (I): 固定 $a_2 = 1$ 和 $d = 1$, 改变 $a_1 = a$. 这时可以导出 \mathcal{L} 的特征值多项式为

$$|\lambda \mathbf{I} - \mathcal{L}| = \lambda(\lambda - 2)[\Delta_2 - \Delta_1 - (N - 2) \times (\Delta_3 + \Delta_4)](\Delta_2 - \Delta_3)^{N-2},$$

其中

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= -(\lambda - 2a - 1) + (N - 3)a, \\ \Delta_2 &= -(\lambda - 2)(\lambda - 2a - 1) + 1 - a, \\ \Delta_3 &= (\lambda - 2)a - a, \\ \Delta_4 &= -(\lambda - 2a - 1) + (N - 3)a. \end{aligned}$$

故两层网络的特征值为

$$0, \underbrace{\lambda_\alpha, \dots, \lambda_\alpha}_{N-2}, 2, \underbrace{\lambda_\beta, \dots, \lambda_\beta}_{N-2}, \lambda_\gamma, \lambda_\delta,$$

其中

$$\begin{aligned} \lambda_\alpha &= (a + 3 - \sqrt{(a - 1)^2 + 4})/2, \\ \lambda_\beta &= (a + 3 + \sqrt{(a - 1)^2 + 4})/2, \\ \lambda_\gamma &= (Na + a + 2 - \sqrt{N^2(a - 1)^2 + 4})/2, \\ \lambda_\delta &= (Na + a + 2 + \sqrt{N^2(a - 1)^2 + 4})/2. \end{aligned}$$

对于所有的 a , 有 $\lambda_\alpha < 2$, 所以此时方式 (I) 的

$$\lambda_2^1 = \lambda_\alpha = (a + 3 - \sqrt{(a - 1)^2 + 4})/2, \lambda_{\max}^1 = \lambda_\delta = (Na + a + 2 + \sqrt{N^2(a - 1)^2 + 4})/2.$$

方式 (II): 固定 $d = 1$, 改变 $a_1 = a_2 = a$. 应用 (5) 式得 \mathcal{L} 的特征值多项式为

$$|\lambda \mathbf{I} - \mathcal{L}| = \lambda(\lambda - a)^{N-2}(\lambda - 2)(\lambda - a - 2)^{N-2} \times (\lambda - Na)(\lambda - Na - 2).$$

所以特征值是

$$0, \underbrace{a, \dots, a}_{N-2}, 2, \underbrace{a + 2, \dots, a + 2}_{N-2}, Na, Na + 2,$$

所以方式 (II) 的 $\lambda_2^2 = \min\{a, 2\}$, $\lambda_{\max}^2 = Na + 2$.

方式 (III): 固定 $a_1 = a_2 = 1$, 改变 d . 应用 (5) 式计算得 \mathcal{L} 的特征多项式为

$$|\lambda - \mathcal{L}| = \lambda(\lambda - 2d)(\lambda - 1)^{N-2}(\lambda - 1 - 2d)^{N-2} \times (\lambda - N)(\lambda - N - 2d).$$

故网络的特征值为

$$0, 2d, \underbrace{1, \dots, 1}_{N-2}, \underbrace{1 + 2d, \dots, 1 + 2d}_{N-2}, N, N + 2d.$$

所以方式 (III) 的 $\lambda_2^3 = \min\{2d, 1\}$, $\lambda_{\max}^3 = N + 2d$.

下面研究改变相同大小的耦合强度, 使两层网络的同步能力达到最大, 应该选择哪一种方式.

对同步域无界的情形, 上述三种方式对应的 λ_2 分别为: $\lambda_2^1 = (a + 3 - \sqrt{(a - 1)^2 + 4})/2$, $\lambda_2^2 = \min\{a, 2\}$, $\lambda_2^3 = \min\{2d, 1\}$. 通过计算比较得到: 当 $a = d < (2 - \sqrt{2})/2$ 时, $\lambda_2^1 > \lambda_2^3 > \lambda_2^2$; 当 $(2 - \sqrt{2})/2 < a = d < 1$ 时, $\lambda_2^3 > \lambda_2^1 > \lambda_2^2$; 当 $a = d > 1$ 时, $\lambda_2^2 > \lambda_2^1 > \lambda_2^3$. 所以当改变的 $a = d < (2 - \sqrt{2})/2$ 时, 选择方式 (I); 当 $(2 - \sqrt{2})/2 < a = d < 1$ 时, 选择方式 (III); 当 $a = d > 1$ 时, 选择方式 (II).

对同步域有界的情形, 三种方式对应的 r 的取值是:

$$\begin{aligned} r^1 &= \frac{Na + a + 2 + \sqrt{N^2(a - 1)^2 + 4}}{a + 3 - \sqrt{(a - 1)^2 + 4}}, \\ r^2 &= \max\{(Na + 2)/a, (Na + 2)/2\}, \\ r^3 &= \max\{(N + 2d)/2d, N + 2d\}, \end{aligned}$$

且 r^1, r^2, r^3 随着 $a = d$ 的变化会有交点. 交点处说明三种方式有相等的 r , 即在交点处网络的同步能力相同. 假设交点分别是 $o_1 < o_2 < o_3 < o_4 < o_5 < o_6 < o_7 < o_8$. 通过计算得到 $o_3 = (N - 4)/(2N - 4)$, $o_4 = o_5 = o_6 = 1$, $o_8 = (2N - 2)/(N - 4)$, 而 o_1, o_2, o_7 的值很难计算, 在此不对其进行计算. 当 $a = d < o_1$ 时, $r^1 < r^2 < r^3$; 当 $o_1 < a = d < o_2$ 时, $r^2 < r^1 < r^3$; 当 $o_2 < a = d < o_3$ 时, $r^2 < r^3 < r^1$; 当 $o_3 < a = d < 1$ 时, 有 $r^3 < r^2 < r^1$; 当 $1 < a = d < o_7$ 时, $r^2 < r^1 < r^3$; 当 $o_7 < a = d < o_8$ 时, $r^2 < r^3 < r^1$; 当 $a = d > o_8$ 时, $r^3 < r^2 < r^1$. 说明当改变的 $a = d < o_1$ 时, 选择方式 (I); 当 $o_1 < a = d < o_3$ 和 $1 < a = d < o_8$ 时, 选择方式 (II); 当 $o_3 < a = d < 1$ 和 $a = d > o_8$ 时, 选择方式 (III).

3.2.3 数值仿真

单层星形网络的节点数是 $N = 200$, 层内耦合强度是 $a_1 = a_2 = a = 1$, 层间耦合强度是 $d = 1$. 按照三种方式进行数值仿真, 得到图 8.

从图 8 中可以看出当 $a = d = 1$ 时, 三种方式的 λ_2 和 $r = \lambda_{\max}/\lambda_2$ 相同. 所以假设在 $a = d = 1$ 的基础上, 改变耦合强度来改变网络的同步能力. 从图 8(a) 中看出, 对于同步域无界的情形, 按照

三种方式减小耦合强度时, 当 $0 \ll a = d < 1$ 时, $\lambda_2^3 > \lambda_2^1 > \lambda_2^2$, 此时应选择方式 (III); 当 $a = d \ll 1$ 时, $\lambda_2^1 > \lambda_2^3 > \lambda_2^2$, 应选择方式 (I); 但当增大耦合强度时, $\lambda_2^2 > \lambda_2^1 > \lambda_2^3$, 选择方式 (II). 对于同步域有界的情形, 从图 8(b) 可得, 当 $a = d < o_1$ 时, $r^1 < r^2 < r^3$, 应选择方式 (I), 当 $o_1 < a = d < o_2$ 和 $1 < a = d < o_3$ 时, $r^2 < r^1 < r^3$ 或 $r^2 < r^3 < r^1$, 选择方式 (II), 当 $o_2 < a = d < 1$ 和 $a = d > o_3$ 时, $r^3 < r^2 < r^1$, 选择方式 (III).

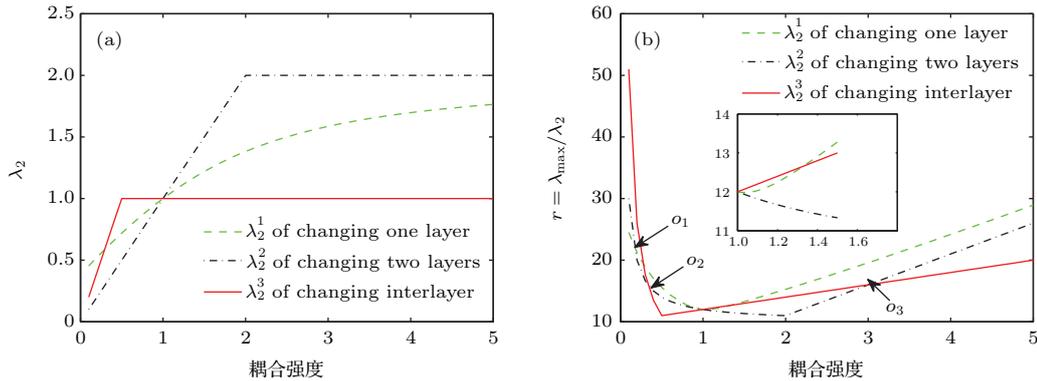


图 8 两层星形网络的 λ_2 (a) 和 $r = \lambda_{\max}/\lambda_2$ (b) 与耦合强度的关系

Fig. 8. The relations between coupling strength and λ_2 (a) and $r = \lambda_{\max}/\lambda_2$ (b) of two-layer star networks.

上述结论告诉我们, 对于星形的两层网络, 增强或削弱网络的同步能力, 想要采用方式 (I), (II) 或者 (III), 要根据层内耦合强度和层间耦合强度的大小来决定, 并没有完全统一的方式.

3.3 两层 BA 无标度网络

BA 无标度网络能够较好地刻画现实中许多真实网络的特征, 本小节我们分析一种特殊的 BA 两层网络, 它在一定意义下接近于上述两层星形网络. 这种两层网络的单层是 BA 无标度网络, 节点数 $N = 200$, 初始网络是 $m_0 = 3$ 的全连接网络, 每次新增加一个节点增加 $m = 3$ 条边. 单层网络层间按照度大与度大的节点, 度小与度小的节点一一对应连接成两层网络. 不妨将 10% N 度大的节点看作 hub 节点, 其余为叶子节点.

1) 取 $N = 200, a = 1, d_0 = 2$, 改变 d , 得到 λ_2 和 r (图 9). 对于同步域无界的情形, d 较小时, λ_2 随 d 的增大而增大, 当 d 达到 $a/2 = 1/2$ 附近时, λ_2 不再随 d 的增大而变化, 即网络的同步能力先增强后不变. 对于同步域有界的情形, d 较小时, r 随 d

的增大而减小, 当 d 达到 $a/2 = 1/2$ 附近后, r 随 d 的增大基本不变, 网络的同步能力先增强后基本保持不变. 这说明 d 在 $a/2$ 附近可使网络的同步能力达到最大.

2) 取 $N = 200, a = 1, d = 1(a < 2d)$ 和 $a = 2, d = 1/2(a > 2d)$, 改变 d_0 , 得到 λ_2 和 r (图 10 和图 11). 对于同步域无界的情形, 当 $a < 2d$ 时, d_0 不影响 λ_2 的值, 网络的同步能力不变; 当 $a > 2d$ 时, d_0 的增大会增加 λ_2 的值, 网络的同步能力略有增强. 对同步域有界的情形, 当 $a < 2d$ 时, r 随着 d_0 的增大而略有增加, 同步能力略微变弱; 当 $a > 2d$ 时, r 随着 d_0 的增大而变小, 网络的同步能力增强.

3) 取 $N = 200, d_0 = 2, d = 1$, 改变 a , 得到 λ_2 和 r (图 12). 对于同步域无界的情形, 当 a 较小时, λ_2 随 a 的增大而增大. 当 a 增大到 $a = 2$ 附近时, λ_2 的值不再改变, 网络的同步能力先增强后不变. 对于同步域有界的情形, a 较小时, r 随 a 的增大而减小, 当 a 增大到 $a = 2$ 附近时, r 随 a 的增大而迅速增大, 网络的同步能力先增强后迅速变弱.

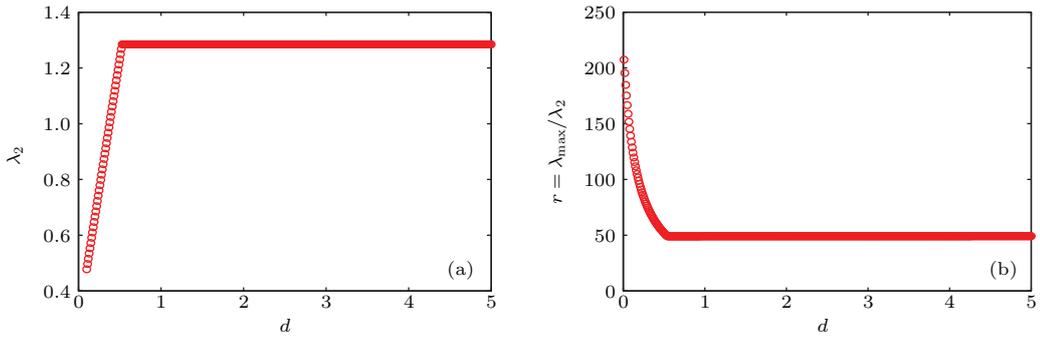


图9 (a) λ_2 , (b) $r = \lambda_{\max}/\lambda_2$ 随两层 BA 网络的叶子节点之间的层间耦合强度 d 的变化

Fig. 9. (a) λ_2 , (b) $r = \lambda_{\max}/\lambda_2$ changes with the interlayer coupling strength between the leaf nodes of the two-layer BA networks d , respectively.

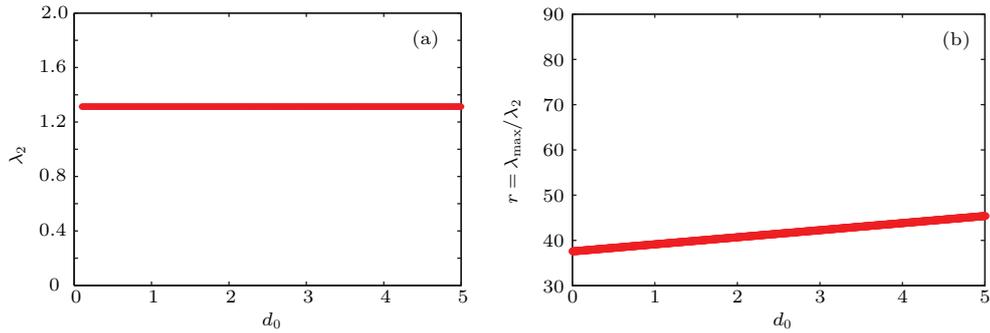


图10 (a) λ_2 , (b) $r = \lambda_{\max}/\lambda_2$ 随两层 BA 网络的中心节点之间的层间耦合强度 d_0 的变化, $a < 2d$

Fig. 10. (a) λ_2 , (b) $r = \lambda_{\max}/\lambda_2$ changes with the interlayer coupling strength between the hub nodes of the two-layer BA networks d_0 , respectively, $a < 2d$.

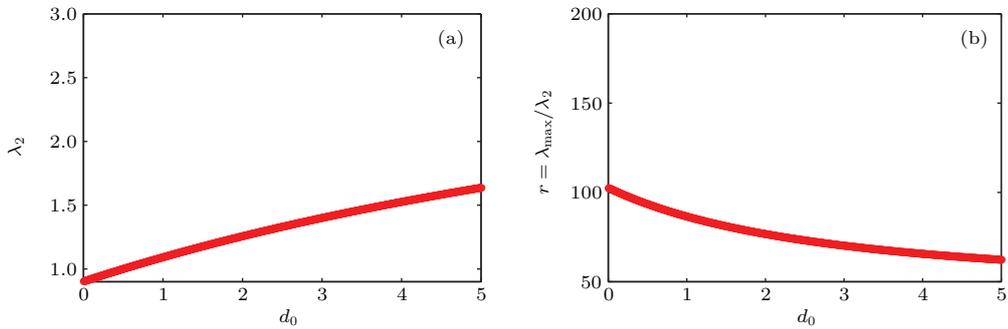


图11 (a) λ_2 , (b) $r = \lambda_{\max}/\lambda_2$ 随两层 BA 网络的中心节点之间的层间耦合强度 d_0 的变化, $a > 2d$

Fig. 11. (a) λ_2 , (b) $r = \lambda_{\max}/\lambda_2$ changes with the interlayer coupling strength between the hub nodes of the two-layer BA networks d_0 , respectively, $a > 2d$.

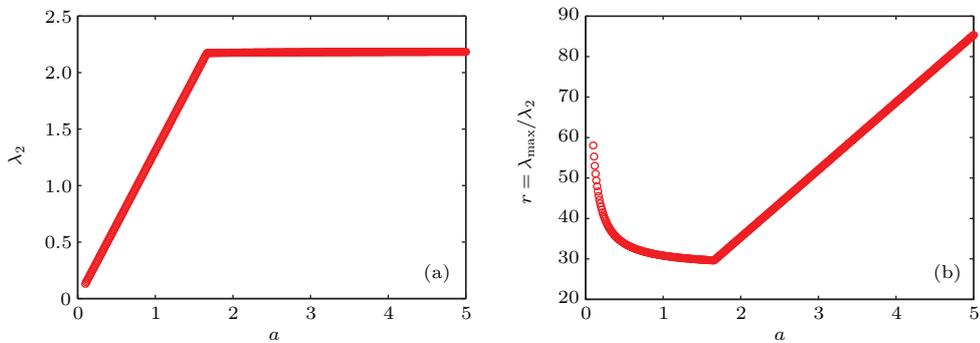


图12 (a) λ_2 , (b) $r = \lambda_{\max}/\lambda_2$ 随两层 BA 网络的层内耦合强度 a 的变化

Fig. 12. (a) λ_2 , (b) $r = \lambda_{\max}/\lambda_2$ changes with the intralayer coupling strength of the two-layer BA networks a , respectively.

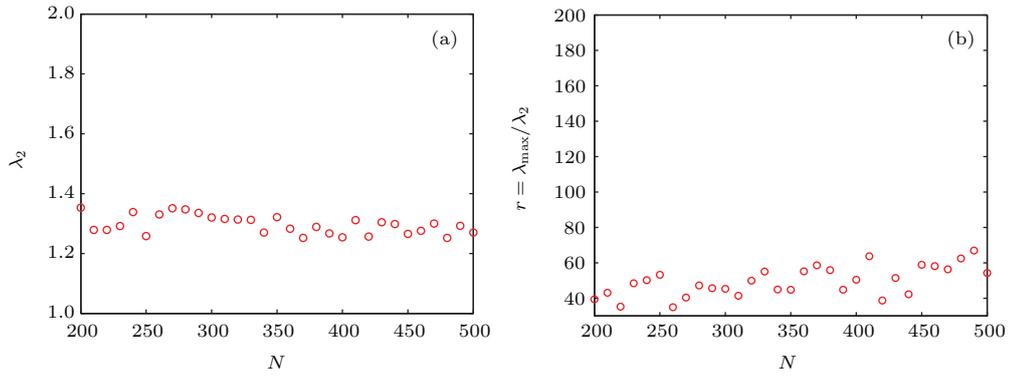


图 13 (a) λ_2 , (b) $r = \lambda_{\max}/\lambda_2$ 随 BA 网络的规模 N 的变化, $a < 2d$

Fig. 13. (a) λ_2 , (b) $r = \lambda_{\max}/\lambda_2$ changes with the size of BA networks N , respectively, $a < 2d$.

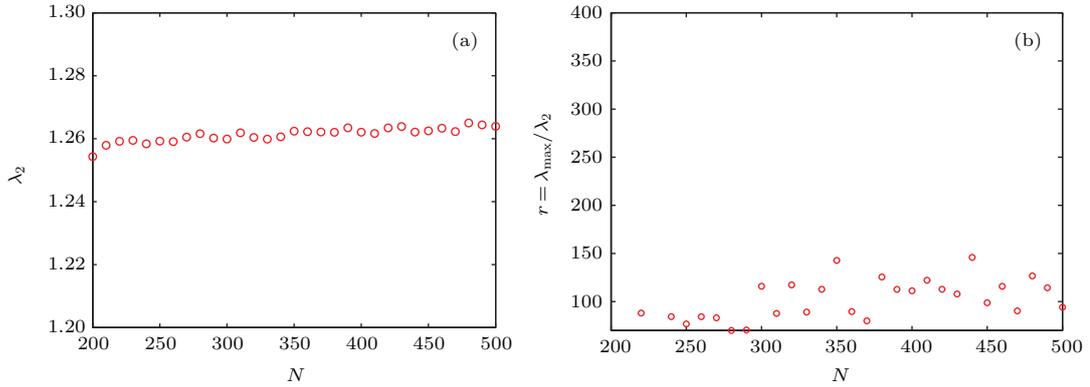


图 14 (a) λ_2 , (b) $r = \lambda_{\max}/\lambda_2$ 随 BA 网络的规模 N 的变化, $a > 2d$

Fig. 14. (a) λ_2 , (b) $r = \lambda_{\max}/\lambda_2$ changes with the size of BA networks N , respectively, $a > 2d$.

4) 取 $d_0 = 2, d = 1, a = 1 (a < 2d)$ 和 $d = 1/2, a = 2 (a > 2d)$, 改变 N , 得到 λ_2 和 r (图 13 和图 14). 从图 13 和图 14 中得出, 对于同步域无界的情形, N 基本不影响 λ_2 的值, 网络的同步能力基本不变; 当同步域有界时, r 随着 N 的增大有增大的趋势, 但在小范围内基本不改变网络的同步能力, 网络的同步能力总体变弱.

通过改变耦合强度可以改变网络的同步能力. 下面假设 $a_1 = a_2 = a = 1, d = d_0 = 1$, 按照三种方式进行数值仿真, 得到图 15.

从图 15 中可以看出当 $a = d = 1$ 时, 三种方式的 λ_2 和 $r = \lambda_{\max}/\lambda_2$ 的值相等. 对于同步域无界的情形, 从图 15(a) 中看出, 在 $a = d = 1$ 的基础上, 按照三种形方式减小耦合强度时, 当 $0 \ll a = d < 1$ 时,

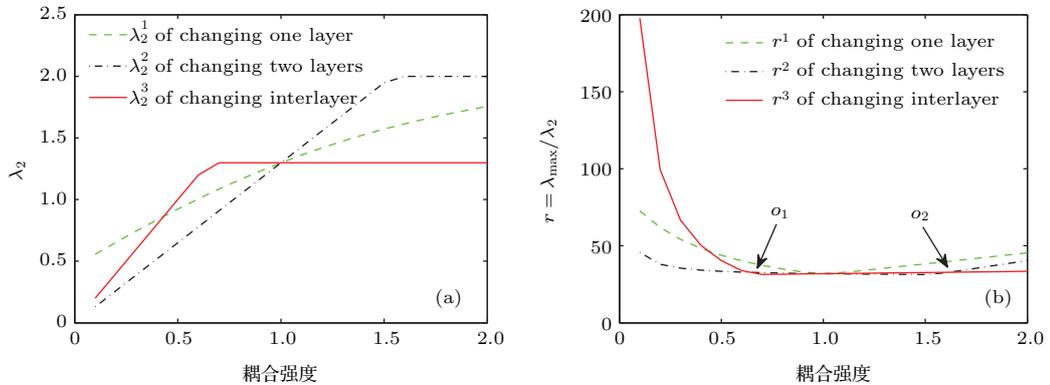


图 15 两层 BA 无标度网络的 λ_2 (a) 和 $r = \lambda_{\max}/\lambda_2$ (b) 与耦合强度的关系

Fig. 15. The relations between coupling strength and λ_2 (a) and $r = \lambda_{\max}/\lambda_2$ (b) of two-layer BA networks.

$\lambda_2^3 > \lambda_2^1 > \lambda_2^2$, 故此时应该选择方式(III); 当 $a = d \ll 1$ 时, $\lambda_2^1 > \lambda_2^3 > \lambda_2^2$, 应选择方式(I); 但当在 $a = d = 1$ 的基础上增大耦合强度时, $\lambda_2^3 < \lambda_2^1 < \lambda_2^2$, 选择方式(II). 对于网络同步域有界的情形, 从图 15(b) 可得, 在 $a = d = 1$ 的基础上, 当 $a = d < o_1$ 和 $1 < a = d < o_2$ 时, $r^2 < r^1 < r^3$ 或 $r^2 < r^3 < r^1$, 选择方式(II), 当 $o_1 < a = d < 1$ 和 $a = d > o_2$ 时, $r^3 < r^2 < r^1$, 选择方式(III).

将图 2 至图 9 分别与图 10 至图 15 比较, 发现两层 BA 无标度网络和两层星形网络的同步能力与 N, a, d, d_0 的关系非常类似, 这正是因为星形网络和 BA 无标度网络都是典型的异质网络的缘故.

4 讨论与结论

本文在理论上严格导出了两层星形网络当中心节点和叶子节点层间耦合强度不同和相同时的特征值谱的解析表达式, 并在此基础上分析了对于不同的网络同步域, 节点数、层间耦合强度和层内耦合强度对网络的同步能力的影响. 对于同步域无界的情形, 网络的同步能力与叶子节点的层间耦合强度和网络的层内耦合强度有关. 当层内耦合强度比较弱时, 网络的同步能力仅依赖于层内耦合强度; 当网络的叶子节点之间的层间耦合强度弱时, 网络的同步能力仅依赖于叶子节点之间的层间耦合强度. 即网络的同步能力由层内耦合强度和叶子之间的层间耦合强度比较弱的一方决定. 对于网络同步域有界的情形, 网络的同步能力与节点数、层间耦合强度和层内耦合强度都有关系. 当层内耦合强度比较弱时, 层内耦合强度的增大会增强网络的同步能力, 而节点数、层间耦合强度的增大反而使网络的同步能力变弱; 当叶子节点之间的层间耦合强度比较弱时, 叶子节点之间的层间耦合强度的增大会增强网络的同步能力, 而节点数、层内耦合强度和中心节点之间的层间耦合强度的增大会减弱网络的同步能力. 为了探讨更有利于同步的耦合方式, 在层内耦合强度和层间耦合强度相同的基础上 ($a = d = d_0 = 1$), 给出了三种不同方式耦合强度的变化. 要增强同步域无界网络的同步能力, 当 $a = d \ll 1$ 时, 改变某一层的层内耦合强度; 当 $0 \ll a = d < 1$, 改变层间耦合强度; 当 $a = d > 1$, 改变两个单层网络的层内耦合强度. 而对于同步域有界的情形, 要增强网络同步能力, 当 $a = d < o_1$ 时, 应改变某一层的层内耦合强度; 当

$o_1 < a = d < o_2$ 和 $a = d > o_3$ 时, 应改变层间耦合强度; 其他情形则选择改变两个单层网络的层内耦合强度. 最后, 针对一类两层 BA 无标度网络, 给出了上述问题的数值仿真结果. 由于两层星形网络与两层 BA 无标度网络都具有中心节点, 因此在性质上有相似性. 同时也告诉我们, 由于两层星形网络的特征值我们已经导出解析表达式, 而两层 BA 无标度网络无法导出, 所以我们可以通过两层星形网络的精确结果来理解两层 BA 无标度网络的性质.

到目前为止, 对多层网络的研究仍然存在许多问题没有解决. 基于本文涉及的多层星形网络的特征值谱及同步能力而言, 譬如当网络的中心节点之间的层间耦合强度和叶子节点之间的层间耦合强度不相同, 在改变了中心节点之间的层间耦合强度后, 如何改变叶子节点之间的层间耦合强度才能使网络的同步能力不变化, 即本文中如果中心节点之间的层间的耦合强度 d_0 增大或减小, 我们应该怎样变化叶子节点之间的层间耦合强度 d , 才能使整个两层网络的同步能力不变. 又譬如目前对多层网络的研究很多都是在两层网络上进行的, 那么两层网络的哪些结论可以直接推广到多层网络上, 哪些结论必须进行有效的验证和推导, 甚至无法推广到多层网络上, 比如文中的特征值解析表达式, 当层与层之间的耦合强度相同时, 多层星形网络特征值的一般表达式包含两层的结论.

参考文献

- [1] Mucha P J, Richardson T, Macon K, Porter M A, Onnela J P 2010 *Science* **328** 876
- [2] D'Agostino G, Scala A 2014 *Networks of Networks: The Last Frontier of Complexity* (Berlin: Springer International Publishing) pp53–73
- [3] Kivelä M, Arenas A, Barthelemy M, Gleeson J P, Moreno Y, Porter M A 2014 *J. Com. Net.* **2** 203
- [4] Aguirre J, Sevilla-Escoboza R, Gutiérrez R, Papo D, Buldú J M 2014 *Phys. Rev. Lett.* **112** 248701
- [5] Um J, Minnhagen P, Kim B J 2011 *Chaos* **21** 5712
- [6] Lu R Q, Yu W W, Lü J H, Xue A K 2014 *IEEE T. Neur. Net. Lear.* **25** 2110
- [7] Zhang X Y, Boccaletti S, Guan S G, Liu Z H 2015 *Phys. Rev. Lett.* **114** 038701
- [8] Xu M M, Zhou J, Lu J A, Wu X Q 2015 *Eur. Phys. J. B* **88** 1
- [9] Boccaletti S, Bianconi G, Criado R, Del Genio C I, Gómez-Gardeñes J, Romance M, Sendiña-Nadal I, Wang Z, Zanin M 2014 *Phys. Rep.* **544** 1

- [10] Gómez S, Díaz-Guilera A, Gómez-Gardeñes J, Pérez-Vicente C J, Moreno Y, Arenas A 2013 *Phys. Rev. Lett.* **110** 028701
- [11] Solé-Ribalta A, De Domenico M, Kouvaris N E, Díaz-Guilera A, Gómez S, Arenas A 2013 *Phys. Rev. E* **88** 032807
- [12] Bauch C T, Galvani A P 2013 *Science* **342** 47
- [13] Wang W, Tang M, Yang H, Do Y, Lai Y C, Lee G W 2014 *Sci. Rep.* **4** 2154
- [14] Granell C, Gómez S, Arenas A 2013 *Phys. Rev. Lett.* **111** 128701
- [15] Wang H J, Li Q, D'Agostino G, Havlin S, Stanley H E, Van Mieghem P 2013 *Phys. Rev. E* **88** 022801
- [16] Ouyang B, Jin X Y, Xia Y X, Jiang L R, Wu D P 2014 *Acta Phys. Sin.* **63** 218902 (in Chinese) [欧阳博, 金心宇, 夏永祥, 蒋路茸, 吴端坡 2014 物理学报 **63** 218902]
- [17] Peng X Z, Yao H, Du J, Wang Z, Ding C 2015 *Acta Phys. Sin.* **64** 048901 (in Chinese) [彭兴钊, 姚宏, 杜军, 王哲, 丁超 2015 物理学报 **64** 048901]
- [18] Chen S M, Lü H, Xu Q G, Xu Y F, Lai Q 2015 *Acta Phys. Sin.* **64** 048902 (in Chinese) [陈世明, 吕辉, 徐青刚, 许云飞, 赖强 2015 物理学报 **64** 048902]
- [19] Blekhnman I I 1988 *Synchronization in Science and Technology* (American Society of Mechanical Engineers Press) pp1–255
- [20] Buck J 1988 *Q. Revs. Biol.* **63** 265
- [21] Walker T J 1969 *Science* **166** 891
- [22] Hansel D, Sompolinsky H 1992 *Phys. Rev. Lett.* **68** 718
- [23] Peskin C S 1975 *Mathematical Aspects of Heart Physiology* (New York: New York University) pp1–278
- [24] Uhlhaas P J, Singer W 2006 *Neuron* **52** 155
- [25] Liu H, Chen J, Lu J A, Cao M 2010 *Physica A* **389** 1759
- [26] Lu W L, Liu B, Chen T P 2010 *Chaos* **20** 013120
- [27] Chen L, Lu J A, Tse C K 2009 *IEEE Trans. Circuits Syst.-II* **56** 310
- [28] Suykens J A K, Osipov G V 2008 *Chaos* **18** 037101
- [29] Arenas A, Díaz-Guilera A, Kurths J, Moreno Y, Zhou C 2008 *Phys. Rep.* **469** 93
- [30] Wu W, Chen T P 2008 *IEEE T. Neur. Net.* **19** 319
- [31] Han X P, Lu J A, Wu X Q 2008 *Int. J. Bifurcat. Chaos* **18** 1539
- [32] Zhou J, Lu J A, Lü J H 2008 *Automatica* **44** 996
- [33] Liu Q, Fang J Q, Li Y 2007 *Commun. Theor. Phys.* **47** 752
- [34] Zhou J, Lu J A, Lü J H 2006 *IEEE T. Automat. Contr.* **51** 652
- [35] Lu X B, Wang X F, Fang J Q 2006 *Physica A* **371** 841
- [36] Lu W L, Chen T P, Chen G R 2006 *Physica D* **221** 118
- [37] Nishikawa T, Motter A E, Lai Y C, Hoppensteadt F C 2003 *Phys. Rev. Lett.* **91** 014201
- [38] Barahona M, Pecora L M 2002 *Phys. Rev. Lett.* **89** 716
- [39] Kocarev L, Parlitz U 1996 *Phys. Rev. Lett.* **76** 1816
- [40] The Algebra Group of Teaching and Research Section of Algebra and Gemotry, Mathematics Department, Beijing University 2003 *Advanced Algebra (Third Edition)* (Beijing: Higher Education Press) pp43–82 (in Chinese) [北京大学数学系几何与代数教研室代数小组 2003 高等代数(第三版)(北京, 高等教育出版社)第43—82页]
- [41] Pecora L M, Carroll T L 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 3956
- [42] Pecora L M, Carroll T L, Johnson G, Mar D, Fink K S 2000 *Int. J. Bifurcat. Chaos* **10** 273
- [43] Tang L K, Lu J A, Lü J H, Yu X H 2012 *Int. J. Bifurcat. Chaos* **22** 1250282

Synchronizability and eigenvalues of two-layer star networks*

Xu Ming-Ming Lu Jun-An Zhou Jin[†]

(School of Mathematics and Statistics, Wuhan University, Wuhan 430072, China)

(Received 7 August 2015; revised manuscript received 17 October 2015)

Abstract

From the study of multilayer networks, scientists have found that the properties of the multilayer networks show great difference from those of the traditional complex networks. In this paper, we derive strictly the spectrum of the Supra-Laplace matrix and the synchronizability of two-layer star networks by applying the master stability method. Through mathematical analysis of the eigenvalues of the Supra-Laplace matrix, we study how the node number, the inter-layer and the intra-layer coupling strengths influence the synchronizability of a two-layer star network. We find that when the synchronous region is unbounded, the synchronizability of a two-layer star network is only related to the intra-layer coupling strength between the leaf nodes or the inter-layer coupling strength of the entire network. If the synchronous region of a two-layer star network is bounded, not only the inter-layer coupling strength of the network and the intra-layer coupling strength between the leaf nodes, but also the intra-layer coupling strength between the hub nodes and the network size have influence on the synchronizability of the networks. Provided that the same inter-layer and intra-layer coupling strengths are concerned, we would further discuss the optimal ways of strengthening the synchronizability of a two-layer star network. If the inter-layer and intra-layer coupling strengths are far less than unity, changing the intra-layer coupling strength is the best way to enhance the synchronizability no matter what the synchronous region is. While if the coupling strengths are the same as, less than or more than unity, there will be different scenarios for the network with bounded and unbounded synchronous regions. Besides, we also discuss the synchronizability of the multilayer network with more than two layers. And then, we carry out numerical simulations and theoretical analysis of the two-layer BA scale-free networks coupled with 200 nodes and obtain very similar conclusions to that of the two-layer star networks. Finally, conclusion and discussion are given to summarize the main results and our future research interests.

Keywords: multilayer networks, star networks, synchronization, eigenvalue spectrum

PACS: 89.75.Fb, 89.75.-k, 89.75.Hc, 89.70.-a

DOI: 10.7498/aps.65.028902

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 61374173, 11172215).

[†] Corresponding author. E-mail: jzhou@whu.edu.cn